

12.1

a) $f(2) = 7500 \cdot 7,9^2 = 468\,075$

Sijoitetaan $x = 2$ funktion lausekkeeseen $f(x) = 7500 \cdot 7,9^x$.

Tulos tarkoittaa, että 2 tunnin jälkeen bakteerien määrä on likimain 468 000.

b) Ajanhetkellä $x = 0$ bakteereita on

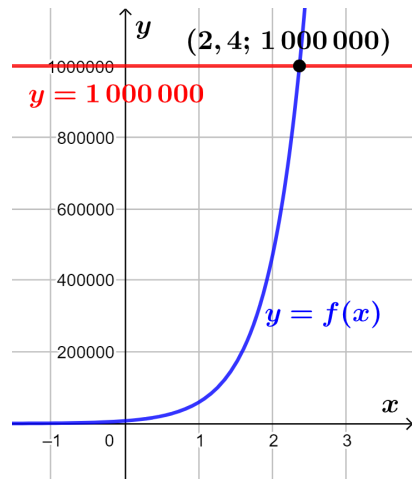
$$f(0) = 7500 \cdot 7,9^0 = 7500 \cdot 1 = 7500.$$

c) Koska x on aika tunteina, funktion $f(x) = 7500 \cdot 7,9^x$ lausekkeen muutoskerroin $7,9$ tarkoittaa, että bakteerien määrä tulee joka tunti $7,9$ -kertaiseksi.

d) Piirretään funktion f kuvaaja.

Piirretään suora $y = 1\,000\,000$ ja määritetään suoran ja kuvaajan leikkauspiste.

Bakteerien lukumäärä on $1\,000\,000$, kun aikaa on kulunut noin $2,4$ tuntia.



Vastaus

a) $f(2) = 468\,075$

Bakteerien lukumäärä 2 tunnin kuluttua on likimain 468 000.

b) 7500

c) $7,9$ -kertaiseksi

d) $2,4$ tunnin kuluttua

12.2

- a) $f(20) = 75 \cdot 0,83^{20} = 1,805... \approx 1,8$ Sijoitetaan $x = 20$ funktion lausekkeeseen $f(x) = 75 \cdot 0,83^x$.

Tulos tarkoittaa, että 20 vuorokauden kuluttua kaasua on jäljellä likimain 1,8 mg.

- b) Ajanhetkellä $x = 0$ kaasun massa on
 $f(0) = 75 \cdot 0,83^0 = 75 \cdot 1 = 75$ (mg).

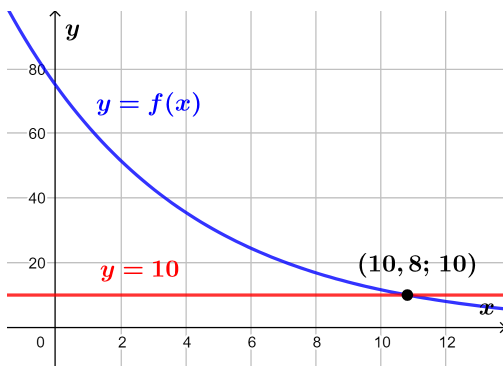
- c) Koska x on aika vuorokausina, funktion $f(x) = 75 \cdot 0,83^x$ lausekkeen muutoskerroin 0,83 tarkoittaa, että kaasun massa tulee joka vuorokausi 0,83-kertaiseksi.

Vuorokauden kuluttua massasta on jäljellä 83 %, joten massa pienenee vuorokaudessa $100 \% - 83 \% = 17 \%$.

- d) Piirretään funktion f kuvaaja.

Piirretään suora $y = 10$ ja määritetään suoran ja kuvaajan leikkauspiste.

Kaasun massa on 10 mg, kun aikaa on kulunut noin 11 vuorokautta.



Vastaus

- a) $f(20) \approx 1,8$

Kaasua on jäljellä 20 vuorokauden kuluttua likimain 1,8 mg.

- b) 75 mg

- c) 0,83-kertaiseksi, pienenee 17 % vuorokaudessa

- d) 11 vuorokauden kuluttua

12.3

- a) Auton arvo alenee joka vuosi 14 %, joten vuoden kuluttua sen arvo on $100 \% - 14 \% = 86 \%$ alkuperäisestä arvosta. Auton arvo tulee siis joka vuosi 0,86-kertaiseksi.

Auton arvo alussa on 28 300 €.

Auton arvon euroina x vuoden kuluttua ilmaisee funktio
 $f(x) = 28\,300 \cdot 0,86^x$.

- b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 10$.

$$f(10) = 28\,300 \cdot 0,86^{10} = 6262,834... \approx 6300 \text{ (€)}$$

Kymmenen vuoden kuluttua auton arvo on noin 6300 €.

- c) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = -2$.

$$f(-2) = 28\,300 \cdot 0,86^{-2} = 38\,263,926... \approx 38\,300 \text{ (€)}$$

Auton arvo uutena oli noin 38 300 €.

Vastaus

- a) $f(x) = 28\,300 \cdot 0,86^x$
b) 6300 €
c) 38 300 €

12.4

Kuvion pituusmittoja suurennetaan jokaisella suurennoksella 20 %, joten suurennoksen jälkeen pituusmitat ovat $100 \% + 20 \% = 120 \%$ alkuperäisistä mitoista. Kuvion pituusmitat tulevat siis jokaisella suurennoksella 1,2 -kertaiseksi.

Alkuperäisen kirjaimen leveys on 0,9 mm.

a) Yhden suurennoksen jälkeen kirjaimen leveys on

$$0,9 \cdot 1,2 = 1,08 \approx 1,1 \text{ (mm)} .$$

b) Kahden suurennoksen jälkeen kirjaimen leveys on

$$0,9 \cdot 1,2^2 = 1,296 \approx 1,3 \text{ (mm)} .$$

c) Neljän suurennoksen jälkeen kirjaimen leveys on

$$0,9 \cdot 1,2^4 = 1,866... \approx 1,9 \text{ (mm)} .$$

d) x suurennoksen jälkeen kirjaimen leveys on

$$0,9 \cdot 1,2^x \text{ (mm)} .$$

Vastaus

a) 1,1 mm

b) 1,3 mm

c) 1,9 mm

d) $0,9 \cdot 1,2^x$ mm

12.5

Potilaalle annetaan 5,0 mg TC-99m-isotooppia, joten jäljellä olevan isotoopin määrän ilmaisee funktio $f(x) = 5,0 \cdot e^{-0,117x}$.

a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 5$.

$$f(5) = 5,0 \cdot e^{-0,117 \cdot 5} = 2,785... \approx 2,8 \text{ (mg)}$$

5 tunnin jälkeen isotooppia on jäljellä noin 2,8 mg.

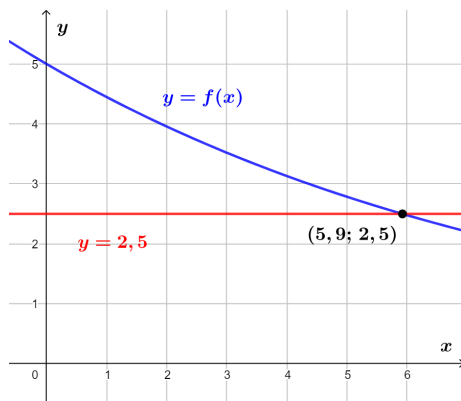
b) Piirretään funktion f kuvaaja.

Puolet annetusta isotoopin määrästä on

$$\frac{5,0 \text{ mg}}{2} = 2,5 \text{ mg. Piirretään}$$

suora $y = 2,5$ ja määritetään suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.

Isotoopista on jäljellä puolet noin 5,9 tunnin kuluttua.



Vastaus

a) 2,8 mg

b) 5,9 tuntia

12.6

Paulin muodostama funktio on väärin.

Radioaktiivisen aineen määrä vähenee joka tunti 17 %, joten tunnin kuluttua sen määrä on $100 \% - 17 \% = 83 \%$ alkuperäisestä määrästä. Radioaktiivisen aineen määrä tulee siis joka tunti 0,83 -kertaiseksi.

Radioaktiivisen aineen määrä alussa on 5,4 mg.

Radioaktiivisen aineen määrän milligrammoina x tunnin jälkeen ilmaisee siis funktio $f(x) = 5,4 \cdot 0,83^x$.

Vastaus

Funktio on virheellinen. Oikea funktio on $f(x) = 5,4 \cdot 0,83^x$.

12.7

- a) Vesihyasinttikasvuston pinta-ala kasvaa joka viikko $1,5$ -kertaiseksi.

Aluksi vesihyasinttikasvuston pinta-ala on $1,0 \text{ m}^2$.

Vesihyasinttikasvuston pinta-alan neliömetreinä x viikon jälkeen ilmaisee funktio $f(x) = 1,0 \cdot 1,5^x = 1,5^x$.

- b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 3$.

$$f(3) = 1,5^3 = 3,375 \approx 3,4 \text{ (m}^2\text{)}$$

Kolmen viikon kuluttua kasvuston pinta-ala on noin $3,4 \text{ m}^2$.

- c) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = -2$.

$$f(-2) = 1,5^{-2} = 0,444... \approx 0,44 \text{ (m}^2\text{)}$$

Kaksi viikkoa sitten kasvuston pinta-ala oli noin $0,44 \text{ m}^2$.

Vastaus

a) $f(x) = 1,5^x$ ($f(x) = 1 \cdot 1,5^x$)

b) $3,4 \text{ m}^2$

c) $0,44 \text{ m}^2$

12.8

- a) Tutkitaan appletilla funktion arvoa kohdassa $x = 0$.

Funktion arvo tässä kohdassa on 15, joten lääkeannos sisälsi vaikuttavaa ainetta 15 mg.

- b) Tutkitaan appletilla, missä kohdassa funktion arvo on puolet otetusta lääkeannoksesta eli $\frac{15 \text{ mg}}{2} = 7,5 \text{ mg}$.

Appletin perusteella funktion arvo on 7,5, kun $x \approx 11,2$. Siis lääkeannoksen määrä on puolittunut, kun aikaa on kulunut noin 11 tuntia.

- c) Tutkitaan appletilla funktion arvoa kohdassa $x = 24$.

Funktion arvo kohdassa $x = 24$ on 3,4, joten vaikuttavan aineen määrä elimistössä 24 tunnin jälkeen on 3,4 mg.

Lääkeannoksesta on jäljellä $\frac{3,4 \text{ mg}}{15 \text{ mg}} = 0,226... \approx 0,23 = 23 \%$.

- d) Tutkitaan appletilla funktion arvoa kohdassa $x = 1$.

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on 14,1, joten vaikuttavan aineen määrä elimistössä tunnin jälkeen on 14,1 mg. Vaikuttavasti aineesta on poistunut siis $15 \text{ mg} - 14,1 \text{ mg} = 0,9 \text{ mg}$.

Vaikuttavaa ainetta on poistunut $\frac{0,9 \text{ mg}}{15 \text{ mg}} = 0,06 = 6 \%$.

Vastaus

- a) 15 mg b) 11 h c) 23 % d) 6 %

12.9

- a) Aineen määrä on alussa 5 g ja määrä tulee joka tunti 2-kertaiseksi. Aineen määrää x tunnin kuluttua kuvaa tällöin funktio $f(x) = 5 \cdot 2^x$ eli vaihtoehto 2.
- b) Aineen määrä on alussa 2 g ja määrä tulee joka tunti 5-kertaiseksi. Aineen määrää x tunnin kuluttua kuvaa tällöin funktio $f(x) = 2 \cdot 5^x$ eli vaihtoehto 4.
- c) Aineen määrä on alussa 2 g ja määrä vähenee joka tunti 50 % eli tulee 0,5-kertaiseksi. Aineen määrää x tunnin kuluttua kuvaa tällöin funktio $f(x) = 2 \cdot 0,5^x$ eli vaihtoehto 3.
- d) Aineen määrä on alussa 5 g ja määrä vähenee joka tunti viidesosaan eli tulee 0,2-kertaiseksi. Aineen määrää x tunnin kuluttua kuvaa tällöin funktio $f(x) = 5 \cdot 0,2^x$ eli vaihtoehto 1.

Vastaus

- a) 2
b) 4
c) 3
d) 1

12.10

- a) Valaistusvoimakkuus laskee metrin matkalla 72 %, joten metrin syvyydessä se on $100 \% - 72 \% = 28 \%$ alkuperäisestä voimakkuudesta. Valaistusvoimakkuus muuttuu siis jokaisella metrin matkalla 0,28-kertaiseksi.

Valaistusvoimakkuus lammen pinnalla on 70 000 lx.

Valaistusvoimakkuuden lukseina x metrin syvyydessä ilmaisee funktio $f(x) = 70\,000 \cdot 0,28^x$.

- b) Lasketaan funktion arvo, kun $x = 2,0$.

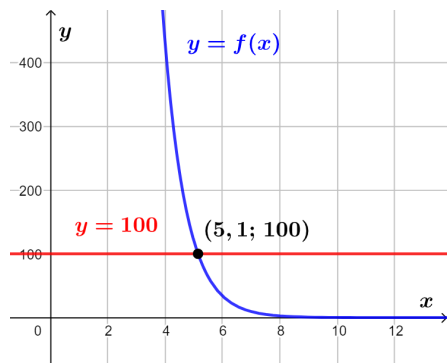
$$f(2,0) = 70\,000 \cdot 0,28^{2,0} = 5488 \approx 5500 \text{ (lx)}$$

Valaistusvoimakkuus 2,0 metrin syvyydellä on noin 5500 luksia.

- c) Piirretään funktion f kuvaaja.

Piirretään suora $y = 100$ ja määritetään suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.

Valaistusvoimakkuus on 100 luksia noin 5,1 metrin syvyydessä.



Vastaus

- a) $f(x) = 70\,000 \cdot 0,28^x$
b) 5500 lx
c) 5,1 m:n syvyydessä

12.11

a) $f(5) = 259\,000 \cdot 1,013^5$
 $= 276\,278,437\dots$
 $\approx 276\,000 \text{ (€)}$

Sijoitetaan $x = 5$
funktion lausekkeeseen
 $f(x) = 259\,000 \cdot 1,013^x$.

Tulos tarkoittaa, että asunnon arvo 5 vuoden kuluttua on likimain 276 000 euroa.

b) Arviointihetkellä $x = 0$ asunnon arvo on
 $f(0) = 259\,000 \cdot 1,013^0 = 259\,000 \cdot 1 = 259\,000 \text{ (€)}$.

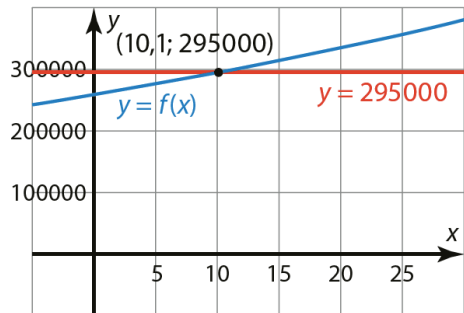
c) Koska x on aika vuosina, funktion $f(x) = 259\,000 \cdot 1,013^x$ lausekkeen muutoskerroin **1,013** tarkoittaa, että asunnon arvo tulee joka vuosi 1,013-kertaiseksi.

Asunnon arvo on 101,3 % verrattuna edellisvuoden arvoon, joten arvo kasvaa 1,3 % vuodessa.

d) Piirretään funktion f kuvaaja.

Piirretään suora $y = 295\,000$ ja määritetään suoran ja kuvaajan leikkauspiste.

Asunnon arvo on 295 000, kun on aikaa kulunut noin 10,1 vuotta.



Vastaus

a) $f(5) \approx 276\,000$

Asunnon arvo 5 vuoden kuluttua on likimain 276 000 €.

b) 259 000 €

c) 1,013-kertaiseksi; 1,3 % vuodessa

d) 10,1 vuoden kuluttua

12.12

- a) Lääkeaineesta poistuu elimistöstä joka tunti 9,0 %, joten tunnin kuluttua sen määrä on $100 \% - 9 \% = 91 \%$ alkuperäisestä määrästä. Lääkeaineen määrä tulee joka tunti siis 0,91-kertaiseksi.

Lääkeaineen määrä alussa on 45 mg.

Lääkeaineen määrän elimistössä milligrammoina x tunnin kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 45 \cdot 0,91^x$.

- b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 3$.

$$f(3) = 45 \cdot 0,91^3 = 33,910... \approx 34 \text{ (mg)}$$

3 tunnin kuluttua lääkeaineen määrä elimistössä on noin 34 mg.

- c) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = -1,5$.

$$f(-1,5) = 45 \cdot 0,91^{-1,5} = 51,838... \approx 52 \text{ (mg)}$$

1,5 tuntia sitten lääkeaineen määrä elimistössä oli noin 52 mg.

- d) 45 minuuttia on $\frac{45}{60} = 0,75$ tuntia. Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 0,75$.

$$f(0,75) = 45 \cdot 0,91^{0,75} = 41,926... \approx 42 \text{ (mg)}$$

45 minuutin kuluttua lääkeaineen määrä elimistössä on noin 42 mg.

Vastaus

- a) $f(x) = 45 \cdot 0,91^x$
b) 34 mg
c) 52 mg
d) 42 mg

12.13

Voimalaitoksen ympäristöön levinneen isotoopin määrä on 3,5 kg, joten jäljellä olevan isotoopin määrän ilmaisee funktio $f(x) = 3,5 \cdot e^{-0,0866x}$.

a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 14$.

$$f(14) = 3,5 \cdot e^{-0,0866 \cdot 14} = 1,041... \approx 1,0 \text{ (kg)}$$

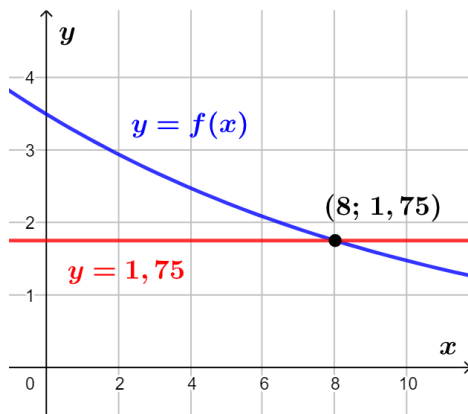
14 vuorokauden jälkeen isotooppia on jäljellä noin 1,0 kg.

b) Piirretään funktion f kuvaaja.

Puolet ympäristöön levinneen isotoopin määrästä on

$$\frac{3,5 \text{ kg}}{2} = 1,75 \text{ kg}.$$

Piirretään suora $y = 1,75$ ja määritetään suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.



Isotoopista on jäljellä puolet 8,0 vuorokauden kuluttua, joten isotoopin puoliintumisaika on 8,0 vuorokautta.

Vastaus

a) 1,0 kg

b) 8,0 vuorokautta

12.14

- a) Topi kasvaa joka kuukausi 4 %, joten kuukauden kuluttua Topin pituus on $100 \% + 4 \% = 104 \%$ alkuperäisestä pituudesta. Topin pituus tulee siis joka kuukausi 1,04 -kertaiseksi.

Topin pituus syntyessä on 54 cm.

Topin pituuden senttimetreinä x kuukauden kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 54 \cdot 1,04^x$.

- b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$.

$$f(1) = 54 \cdot 1,04^1 = 56,16 \approx 56 \text{ (cm)}$$

$$f(2) = 54 \cdot 1,04^2 = 58,406... \approx 58 \text{ (cm)}$$

$$f(3) = 54 \cdot 1,04^3 = 60,742... \approx 61 \text{ (cm)}$$

Kuukauden ikäisenä Topin pituus on noin 56 cm, kahden kuukauden ikäisenä noin 58 cm ja kolmen kuukauden ikäisenä noin 61 cm.

- c) Kolme vuotta on $3 \cdot 12 = 36$ kuukautta. Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 36$.

$$f(36) = 54 \cdot 1,04^{36} = 221,612... \approx 220 \text{ (cm)}$$

Jos Topin kasvu jatkuisi eksponentiaalisena, hänen pituutensa kolmevuotiaana olisi noin 220 cm. Malli ei ole mielekäs kuvaamaan Topin kasvua enää tämän ikäisenä.

Vastaus

a) $f(x) = 54 \cdot 1,04^x$

b) 56 cm, 58 cm ja 61 cm

c) 220 cm

Selkeästi kasvu ei jatku eksponentiaalisena kolmen vuoden ikään asti.

12.15

- a) Jos Suomen väkiluku kasvaisi vuodessa keskimäärin 0,1 %, se tulisi vuodessa 1,001-kertaiseksi.

Suomen väkiluku vuonna 1600 oli noin 300 000.

Suomen väkilukua x vuotta vuoden 1600 jälkeen kuvaa funktio $f(x) = 300\,000 \cdot 1,001^x$.

Vuodesta 1600 vuoteen 2020 on $2020 - 1600 = 420$ vuotta. Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 420$.

$$f(420) = 300\,000 \cdot 1,001^{420} = 456\,492,657... \approx 460\,000$$

Jos Suomen väkiluku olisi kasvanut vuodessa keskimäärin 0,1 %, olisi Suomen väkiluku vuonna 2020 ollut 460 000.

- b) Jos Suomen väkiluku kasvaisi vuodessa keskimäärin 1,1 %, se tulisi vuodessa 1,011-kertaiseksi.

Suomen väkiluku vuonna 1600 oli noin 300 000.

Suomen väkilukua x vuotta vuoden 1600 jälkeen kuvaa funktio $f(x) = 300\,000 \cdot 1,011^x$.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 420$.

$$f(420) = 300\,000 \cdot 1,011^{420} = 29\,689\,754,256... \approx 29\,700\,000$$

Jos Suomen väkiluku olisi kasvanut vuodessa keskimäärin 1,1 %, olisi Suomen väkiluku vuonna 2020 ollut 29 700 000.

Vastaus

- a) 460 000
b) 29 700 000

12.16

Isotoopin I-131 määrä vähenee joka vuorokausi 8,3 %, joten vuorokauden kuluttua sen määrä on $100 \% - 8,3 \% = 91,7 \%$ alkuperäisestä määrästä. Radioaktiivisen aineen määrä tulee siis joka vuorokaudessa 0,917-kertaiseksi.

Isotoopin määrä alussa on 25 µg.

Isotoopin määrän mikrogrammoina x vuorokauden kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 25 \cdot 0,917^x$.

a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 7$.

$$f(7) = 25 \cdot 0,917^7 = 13,630... \approx 14 \text{ (µg)}$$

Seitsemän vuorokauden kuluttua isotooppia on jäljellä noin 14 mikrogrammaa.

b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 30$.

$$f(30) = 25 \cdot 0,917^{30} = 1,857... \approx 1,9 \text{ (µg)}$$

30 vuorokauden kuluttua isotooppia on jäljellä noin 1,9 mikrogrammaa.

Vastaus

a) 14 mikrogrammaa

b) 1,9 mikrogrammaa

12.17

- a) Eksponentiaalista muutosta kuvaavat funktiot ovat muotoa

$$f(x) = a \cdot q^x.$$

Tätä muotoa ovat vaihtoehtojen 1, 4, 5 ja 6 funktioiden lausekkeet.

- b) Eksponenttifunktion lausekkeen $f(x) = a \cdot q^x$ vakio a ilmaisee suureen alkuperäisen arvon.

Tämä vakio on 2 vaihtoehtojen 1 ja 6 eksponenttifunktioiden lausekkeissa.

- c) Eksponenttifunktion lausekkeen $f(x) = a \cdot q^x$ vakio q ilmaisee muuttuvan suureen muutoskertoimen.

Tämä vakio on 2 vaihtoehtojen 4, 5 ja 6 eksponenttifunktioiden lausekkeissa.

Vastaus

- a) 1, 4, 5, 6
b) 1, 6
c) 4, 5, 6

12.18

- a) Tutkitaan appletilla funktion arvoa kohdassa $x = 0$.

Funktion arvo kohdassa $x = 0$ on 33, joten löytöhetkellä ruumiin lämpötila oli 33 °C.

- b) Tutkitaan appletilla, missä kohdassa funktion arvo on 37.

Appletin perusteella funktion arvo on 37, kun $x \approx -6$. Siis kuolinhetki oli 6 tuntia ennen löytöhetkeä.

- c) Appletin perusteella ruumiin lämpötila lähestyy lämpötilaa 18 °C. Tästä voidaan päätellä, että ympäristön lämpötila on noin 18 °C.

Vastaus

- a) 33 °C
b) 6 tuntia ennen löytöhetkeä
c) 18 °C

12.19

- a) Pitsan hinta kasvaa joka vuosi $1,0\%$, joten vuoden kuluttua sen hinta on $100\% + 1\% = 101\%$ alkuperäisestä hinnasta. Pitsan hinta tulee siis joka vuosi $1,01$ -kertaiseksi.

Laura täytti 18 vuonna 2019, joten Laura viettää 70-vuotisjuhliaan 52 vuoden kuluttua. Lasketaan pitsan hinta 52 vuoden kuluttua.

$$9,50 \cdot 1,01^{52} = 15,938... \approx 15,95 \text{ (€)}$$

Kun hinta pyöristetään lähimpään 5 senttiin, saadaan samanlaisen pitsan hinnaksi 15,95 €.

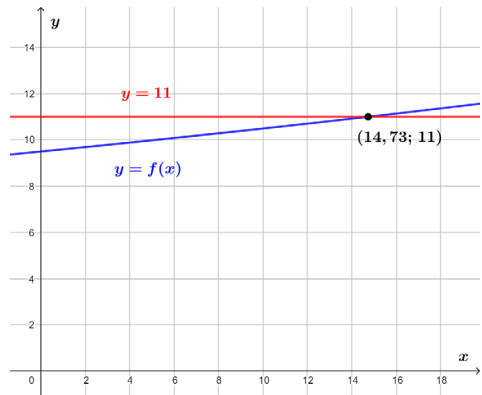
- b) Pitsan hinta vuonna 2019 oli 9,50 €. Hinta tulee joka vuosi $1,01$ -kertaiseksi

Pitsan hinnan euroina x vuotta 18-vuotispäivän jälkeen ilmaisee funktio $f(x) = 9,50 \cdot 1,01^x$.

Piirretään funktion f kuvaaja.

Piirretään suora $y = 11$ ja määritetään suoran ja kuvaajan leikkauspiste.

Pitsan hinta on 11,00 euroa, kun aikaa on kulunut noin 14,7 vuotta. Lauran ikä on tällöin $18 + 14 = 32$ vuotta.



Vastaus

- a) 15,95 € (pyöristettynä lähimpään 5 senttiin)
b) $f(x) = 9,50 \cdot 1,01^x$, 32-vuotias

12.20

- a) Merkitään lääkeaineen nykyistä pitoisuutta kirjaimella a .

Lääkeaineen pitoisuus puolittuu eli tulee $0,5$ -kertaiseksi kuudessa tunnissa.

12 tuntia on 2 kuuden tunnin jaksoa. Lääkeaineen pitoisuus puolittuu siis kaksi kertaa.

12 tunnin kuluttua lääkeaineen määrä on $a \cdot 0,5^2 = 0,25a$.

Lääkeaineen pitoisuus 12 tunnin kuluttua on 25% alkuperäisestä pitoisuudesta, joten pitoisuus on pienentynyt $100\% - 25\% = 75\%$.

- b) Vuorokaudessa eli 24 tunnissa on 4 kuuden tunnin jaksoa.

Lääkeaineen pitoisuus puolittuu siis neljä kertaa.

24 tunnin kuluttua lääkeaineen määrä on $a \cdot 0,5^4 = 0,0625a$.

Lääkeaineen pitoisuus 24 tunnin jälkeen on $6,25\%$ alkuperäisestä pitoisuudesta, joten pitoisuus on pienentynyt $100\% - 6,25\% = 93,75\% \approx 94\%$.

Vastaus

a) 75%

b) $93,75\% \approx 94\%$